APROBADO
Por Bernardo Cascales fecha 8:38 , 20/12/2011

Análisis Complejo: 3.1 Funciones Armónicas

Título de la nota 08/01/2007

Objetivos

1. Entender el concepto de función armónica y conocer ejemplos.
2. Entender el problema de Dirichlet. Resolver el problema de Dirichlet en el disco unidad: conocer el núcleo de Poisson y la representación de funciones armónicas vía el núcleo de Poisson.
3. Caracterizar las funciones armónicas como las que son localmente la parte real de una función holomorfa (o vía la propiedad de la media).
4. Caracterizar los abiertos simplemente conexos utilizando propiedades de las funciones armónicas.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotamos por $C^2(\Omega)$ el espacio de las funciones reales de clase C^2 en Ω y $\triangle : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ definido para $u \in C^2(\Omega)$ por

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D_{11}u + D_{22}u.$$

FINAL

Definición

Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^2, definida en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que es armónica cuando $\triangle u(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$.

1. Denotamos por $A(\Omega)$ el conjunto de las funciones armónicas en Ω: es fácil comprobar que $A(\Omega)$ es un espacio vectorial.
2. Las funciones armónicas de dos variables reales aparecen frecuentemente en la Física.

Proposición

Si la función $f = u + iv$ es holomorfa en Ω entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son funciones armónicas en Ω.

Demostración.- Es suficiente hacer la prueba para u. Sabemos que $u \in C^{\infty}(\Omega)$, y así en particular $u \in C^2(\Omega)$. Por otro lado, las condiciones de Cauchy-Riemann, nos dicen que en cada punto de Ω tenemos

$$\left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{array}\right\} \xrightarrow{v \in C^2(\Omega)} \text{se tiene}$$

La igualdad de las derivadas cruzadas $v_{xy} = v_{yx} \rightsquigarrow u_{xx} = -u_{yy} \rightsquigarrow$
$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \rightsquigarrow u \in A(\Omega). \#$$

Definición

Dada una función armónica $u \in A(\Omega)$, si existe otra función armónica $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω se dice que v es una función *armónica conjugada* de u en Ω.

Proposición

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $v_1, v_2 \in A(\Omega)$ son funciones armónicas conjugadas de $u \in A(\Omega)$ entonces $v_1 - v_2$ es constante.

Demostración.- Si v_1 y $v_2 \in A(\Omega)$ son armónicas conjugadas de u entonces
$$u + iv_1,\ u + iv_2 \in \mathcal{H}(\Omega) \rightsquigarrow u + iv_1 - (u + iv_2) \in \mathcal{H}(\Omega) \rightsquigarrow$$
$$i(v_1 - v_2) \in \mathcal{H}(\Omega) \xrightarrow[\text{Aplicación abierta}]{\text{T}^{\text{ma}}} v_1 - v_2 = \text{cte} \ \#$$

Como veremos entre los ejemplos que siguen hay funciones armónicas sin armónica conjugada.

Ejemplos

1. Las funciones armónicas más sencillas son las funciones de la forma $u(x,y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Las funciones de la forma $u(re^{i\theta}) = r^n \cos n\theta$ son armónicas $\mathbb{C}$.
3. Si $1/\limsup \sqrt[n]{(a_n + b_n)} = R > 0$, entonces la serie trigonométrica

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\rho^n, \qquad [*]$$

define una función armónica en $D(0,R)$.

4. La función $\log|z|$ es armónica en el abierto $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ pero no posee función armónica conjugada en este abierto.

(1) $u_{xx} = 0 = u_{yy} \rightsquigarrow \Delta u = 0.$

(2) Si ponemos $z = x + iy = re^{i\theta}$ $\quad r>0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ $\rightsquigarrow$

$$\mathrm{Re}\left(r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)\right) = r^n \cos n\theta = u(re^{i\theta}).$$

(3) Si ponemos $c_n = a_n - i b_n$, entonces

$$(a_n - ib_n)\rho^n e^{in\theta} = (a_n - ib_n)(\rho^n \cos n\theta + i \rho^n \operatorname{sen} n\theta) =$$

$$= (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\rho^n + i(\cdots) \rightsquigarrow$$

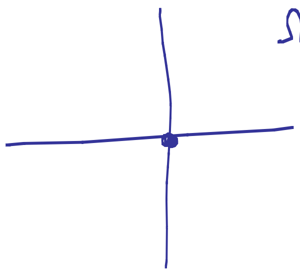
$$\mathrm{Re}(c_n \cdot z^n) = (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\rho^n \quad \text{donde } z = \rho e^{i\theta}$$

Así, como $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n = f(z)$ define una función holomorfa si

$$|z| < \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n + i b_n|}} = R > 0,$$

tenemos que la expresión [*] define una función armónica en $D(0,R)$.

(4) $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$



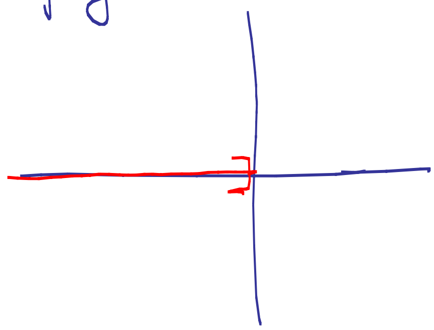
Observar que para $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$u \in A(\Omega) \longleftrightarrow \forall a \in \Omega, \exists D(a,r) \subset \Omega \text{ t.q. } \underset{r>0}{} \quad u|_{D(a,r)} \in A(D(a,r)).$$

Así para probar $u(z) = \log|z|$ en Ω es armónica, será suficiente demostrar que u es localmente la parte real de una función holomorfa.
Ahora bien, dado $a \in \Omega$ si tomamos $D(a,r) \subset \Omega$ sabemos que la identidad $z \longrightarrow z$ tiene un logaritmo holomorfo $L_a : D(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$:
es decir
$$\underset{z\in D(a,r)}{e^{L_a(z)} = z} \rightsquigarrow \underset{z \in D(a,r)}{e^{\operatorname{Re}(L_a(z))} = |z|} \rightsquigarrow$$

$$\operatorname{Re} L_a(z) = \log|z| \quad z \in D(a,r) \rightsquigarrow u \text{ es armónica en } \Omega.$$

Por otro lado, u definida en Ω no puede tener armónica conjugada en Ω: efectivamente en el abierto $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$



la identidad $z \longrightarrow z$ tiene logaritmo holomorfo, que fijamos como el logaritmo principal
$$\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z)$$
Si $u(z) = \log|z|$ tuviese armónica conjugada en Ω, existiría, $v \in A(\Omega)$ tal que $u + iv \in \mathcal{H}(\Omega) \rightsquigarrow$ en Ω_0 v y $\operatorname{Arg}(z)$ son armónicas conjugadas de $u|_{\Omega_0} \underset{\text{conexo}}{\overset{\Omega_0}{\rightsquigarrow}} \underset{z\in\Omega_0}{v(z) = \operatorname{Arg}(z) + \text{cte}} \rightsquigarrow v$ es discontinua en cada punto de la recta $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$. #

Para estudiar la existencia de función armónica conjugada de una función armónica $u \in A(\Omega)$ utilizaremos la forma diferencial

$$d^* u = -u_y\, dx + u_x\, dy$$

llamada diferencial conjugada de u.

Esta forma diferencial es importante porque si $u \in A(\Omega)$ y existe $v \in A(\Omega)$ tal que
$$u + iv =: f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

entonces se tiene:

$$df(z) = du(z) + i\,dv(z) = \quad du(z) + i\left(v_x(z)\,dx + v_y(z)\,dy\right) =$$

$$= du(z) + i\left(-u_y(z)\,dx + u_x(z)\,dy\right) = du(z) + i\,d^*u(z).$$

Con esta observación hemos demostrado que si $u \in A(\Omega)$, tiene armónica conjugada, entonces d^*u es EXACTA. El recíproco también es cierto y para demostrarlo necesitamos un poco de trabajo previo.

Proposición

Para una función armónica $u \in A(\Omega)$ se cumple:

i) $\partial u = \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$ es holomorfa en Ω.

ii) La forma diferencial $d^*u = -u_y\,dx + u_x\,dy$ es cerrada en Ω.

Demostración.-

i) Como $u \in C^2(\Omega) \leadsto \partial u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es de clase C^1.

Por otro lado se tiene que:

$$(u_x)_x \underset{\substack{\uparrow \\ u \in A(\Omega)}}{=} (-u_y)_y \qquad (u_x)_y = -(-u_y)_x \underset{\substack{\uparrow \\ u \in C^2(\Omega).}}{=} u_{yx}$$

ii) Es consecuencia del teorema de Cauchy-Goursat aplicado a la función

$$2\partial u = u_x - iu_y \in \mathcal{H}(\Omega) \leadsto$$

$$\underbrace{2\partial u(z)\,dz}_{\substack{\uparrow \\ \text{forma dif. cerrada}}} = (u_x - iu_y)(dx + i\,dy) = (u_x\,dx + u_y\,dy) + i(-u_y\,dx + u_x\,dy) =$$

$$= \underbrace{du(z)}_{\substack{\uparrow \\ \text{exacta}}} + i\,d^*u(z) \leadsto$$

$$\leadsto \quad d^*u(z) = -i\left(2\partial u(z)\,dz - du(z)\right) \leadsto d^*u \text{ cerrada} \#$$

Proposición FINAL

Para una función armónica $u \in A(\Omega)$ son equivalentes:

i) La forma diferencial $d^*u = -u_y dx + u_x dy$ es exacta en Ω.

ii) En Ω existe una función armónica conjugada de u e.d. existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

Cuando se cumplen estas condiciones, cada primitiva v de d^*u es una función armónica conjugada de u en Ω.

Demostración.-

ii) $\Longrightarrow$ i) Si v es armónica conjugada : $d^*u(z) = dv(z)$.

i) $\Longrightarrow$ ii) Si existe $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $d^*u = dv$, repitiendo los cálculos de la proposición anterior se tiene

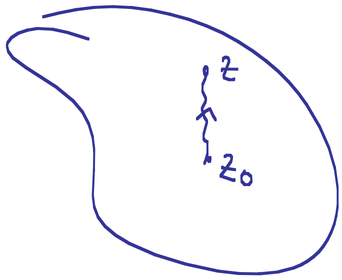
$$2\,\partial u(z)\,dz = du(z) + i\,d^*u(z) = du(z) + i\,dv(z) =$$
$$= d(u+iv)(z) \rightsquigarrow d(u+iv) \text{ no tiene parte } d\bar{z}$$

$\rightsquigarrow$ $u+iv \in \mathcal{H}(\Omega)$ siendo $(u+iv)'(z) = 2\partial u(z)$.

La coletilla en la proposición se sigue de la propia demostración que hemos hecho de i) $\Rightarrow$ ii) #

En particular, cuando las formas diferenciales reales en el abierto Ω son exactas, cada función armónica tiene una armónica conjugada, por ejemplo si Ω es SIMPLEMENTE CONEXO.

NOTA: Si Ω es conexo y d^*u es exacta entonces una primitiva $v \in A(\Omega)$ (que será la armónica conjugada) se obtiene



$z_0 \in \Omega$ FIJO

$$v(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} d^*u$$

donde γ es cualquier camino clase C^1 que conecta $z_0 \rightsquigarrow z$.

En particular tenemos:

Corolario

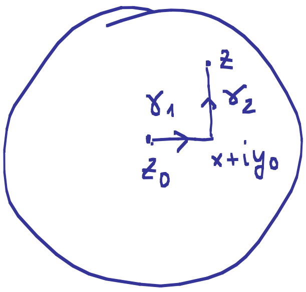
Toda función armónica en un disco $u \in A(D(z_0, r))$, posee función armónica conjugada, dada explícitamente mediante la fórmula

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s,y_0)ds \text{ con } x_0 = \operatorname{Re} z_0,\ y_0 = \operatorname{Im} z_0.$$

Demostración.-

$z = x_0 + iy_0 \qquad z = x + iy$

Tomamos γ_z como en la figura:



$\gamma_1(s) = (s, y_0) \qquad s \in [x_0, x] \qquad \gamma_1'(s) = (1,0)$

$\gamma_2(t) = (x, t) \qquad t \in [y_0, y] \qquad \gamma_2'(t) = (0,1)$

$$v(x,y) = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} (-u_y(z)dx + u_x(z)dy) =$$

$$= \int_{y_0}^{y} u(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} u(s,y_0)\,ds. \quad \#$$

EJEMPLO: Determinar la armónica conjugada de

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$$

Res.- Observar que $u \in A(\mathbb{C})$. Efectivamente:

$$\left.\begin{array}{ll} u_x = 2x + y & u_{xx} = 2 \\ u_y = -2y + x & u_{yy} = -2 \end{array}\right) \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Buscamos v tal que $u + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow$ deben satisfacerse las condiciones de Cauchy-Riemann. Entonces:

$$u_x = 2x + y = v_y \rightsquigarrow v(x,y) = 2xy + y^2/2 + g(x) \rightsquigarrow$$

$$v_x = 2y + g'(x) = -u_y = 2y - x \rightsquigarrow g'(x) = -x \rightsquigarrow$$

$$g(x) = -x^2/2 + \text{cte} \rightsquigarrow v(x,y) = -x^2/2 + y^2/2 + 2xy + \text{cte}. \ \#$$

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces, u es armónica si y sólo si u es localmente la parte real de una función holomorfa.

FINAL

Demostración.- Como sabemos se tiene la equivalencia:

$$\left[u \in A(\Omega) \longleftrightarrow \forall a \in \Omega, \exists \underset{r>0}{D(a,r)} \subset \Omega \text{ t.q. } u|_{D(a,r)} \in A(D(a,r)). \right]$$

Ahora bien en cada disco $D(a,r) \subset \Omega$, $u|_{D(a,r)}$ tiene armónica conjugada y por tanto es la parte real de una función holomorfa. #

Corolario

Las funciones armónicas son de clase C^∞.

Demostración.- Inmediato después del corolario anterior. #

Corolario

La composición de una función holomorfa con una función armónica es una función armónica: si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son abiertos, $f \in \mathscr{H}(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $g \in A(\Omega_2)$ entonces $g \circ f \in A(\Omega_1)$.

Demostración.- Como g es localmente la parte real de una función holomorfa, se tiene que $g \circ f$ también es la parte real de una función holomorfa $\rightsquigarrow$ $g \circ f \in A(\Omega_1)$ #

Nota: El corolario anterior puede demostrarse alternativamente demostrando que:

$$\Delta(g \circ f) = \Delta g \cdot |f'|^2$$

Este cálculo se deja como ejercicio al alumno. #

Teorema

Para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:

a) Ω es simplemente conexo.

b) Toda función armónica $u \in A(\Omega)$ posee función armónica conjugada, i.e., existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $u = \operatorname{Re} f$.

FINAL

Demostración.-

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si utilizamos que en un abierto simplemente conexo toda forma diferencial cerrada es exacta ya tenemos la prueba, dado que d^*u es cerrada y el que sea EXACTA sabemos que es equivalente a que u tenga armónica conjugada. Si no queremos utilizar la propiedad anterior de los abiertos simple. conexos, podemos utilizar que toda función holomorfa tiene primitiva. Así, sabemos $\exists$

$$2\partial u = u_x - i u_y \in \mathcal{H}(\Omega) \rightsquigarrow F \in \mathcal{H}(\Omega):$$

$$F' = u_x - i u_y \rightsquigarrow F'(z)\,dz = (u_x - i u_y)(dx + i dy) =$$

$$dF(z) = (u_x dx + u_y dy) + i(-u_y dx + u_x dy) =$$

$$= du + i d^*u \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow d^*u$ es exacta

(ii) $\Rightarrow$ (i) Probaremos que cada función holomorfa que no se anula tiene logaritmo holómorfo. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega) \Rightarrow u(z) = \log|f(z)|$ es armónica en Ω por la proposición anterior $\rightsquigarrow \exists\, v \in A(\Omega)$ t.q. $u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$

$$\left|\frac{e^{u+iv}(z)}{f(z)}\right| = \frac{e^{u(z)}}{|f(z)|} = 1 \quad \forall z \in \Omega \rightsquigarrow e^{u+iv} = \text{cte}\cdot f$$

$$\overset{\text{cte} \neq 0}{\Longrightarrow} e^{u+iv-a} = f \quad \text{donde } a \in \log(\text{cte}).$$

#

A tener en cuenta...

Obsérvese que si $u \in A(\Omega)$, para cada disco $D(a,R) \subset \Omega$ se tiene que $u|_{D(a,R)}$ es la parte real de una función holomorfa en $D(a,R)$.

Proposición

Las funciones armónicas tienen la propiedad de la media.

Demostración.– $u \in A(\Omega)$ y sea $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Tomemos $R>0$ t.q. $\overline{D(a,r)} \subset D(a,R) \rightsquigarrow u|_{D(a,R)} = \operatorname{Re} f$ donde $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Como $\operatorname{Re} f$ tiene la propiedad de la media, se concluye que:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})\, d\theta \qquad \#$$

Principio del máximo para funciones armónicas

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.

i) Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

ii) Si $\limsup_{z \to a} u(z) \leq 0$ para todo $a \in \partial_\infty \Omega$ entonces $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$. Además, o bien $u(z) < 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u \equiv 0$.

Estos principios del máximo se siguen de los correspondientes principios para funciones subarmónicas que ya hemos demostrado, y que recordamos a continuación.

Principio del máximo para funciones subarmónicas

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica.

i) Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

ii) Si $\limsup_{z \to a} u(z) \leq c$, para cada $a \in \partial_\infty \Omega$, entones o bien $u(z) < c$ para cada $z \in \Omega$ o bien $u(z) = c$ para cada $z \in \Omega$.

En el resultado correspondiente a funciones armónicas en (i) se puede sustituir "máximo absoluto" por "máximo local". Para ello necesitamos demostrar el siguiente resultado.

Proposición

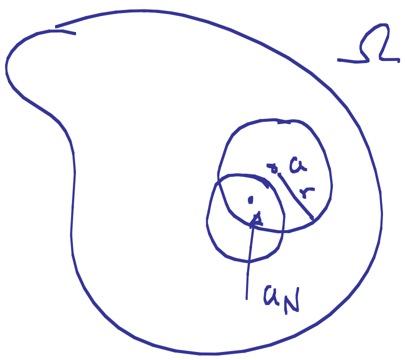
Sean $u, v \in A(\Omega)$ funciones armónicas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $u|_{D(a,r)} = v|_{D(a,r)}$ para algún disco $D(a,r) \subset \Omega$, $r > 0$, entonces $u = v$.

Demostración.- Es suficiente probar que si $u \in A(\Omega)$ y $u|_{D(a,r)} \equiv 0 \leadsto u = 0$.

Hacemos un razonamiento típico que utiliza la conexión de Ω:

$$A := \{ z \in \Omega : \exists r_z > 0 \ \ D(z, r_z) \subset \Omega \ \text{ con } u|_{D(z,r_z)} \equiv 0 \}$$

- $A \neq \phi$
- A es abierto claramente.
- A es cerrado en Ω: $A \ni a_n \longrightarrow a \in \Omega$. Tomamos $D(a,r) \subset \Omega$ y fijamos $a_N \in D(a,r)$



$\exists f \in \mathcal{H}(D(a,r)) : \operatorname{Re} f = u$ en $D(a,r)$

$\exists D(a_N, R) \subset \Omega$ y $g \in \mathcal{H}(D(a_N, R))$ t.q. $\operatorname{Re} g = u \leadsto$

$0 = \operatorname{Re} g|_{D(a_N,R) \cap D(a,r)} = \operatorname{Re} f|_{D(a_N,R) \cap D(a,r)} \leadsto$

$f = 0 + i$ cte en $D(a_N, R) \cap D(a,r) \leadsto f = 0 + i$ cte en $D(a,r) \leadsto u = 0$ en $D(a,r)$ #

Para las funciones armónicas no es válido un principio de identidad similar al de las funciones holomorfas, i.e., : la función $u(z) = \log|z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se anula sobre $M = \{z : |z| = 1\}$ pero no es idénticamente nula.

Corolario

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si u alcanza un máximo relativo en Ω, entonces u es constante.

Demostración.- Sea $a \in \Omega$ un máximo relativo de $u \rightsquigarrow \exists\, r > 0$, $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $u(z) \leq u(a)$ para cada $z \in D(a,r) \rightsquigarrow u|_{D(a,r)} \equiv u(a)$ ya que $u|_{D(a,r)}$ alcanza en $\underset{\sim}{a}$ un máximo absoluto. Ahora u y la cte $\equiv u(a)$ coinciden en $D(a,r) \subset \Omega \xrightarrow[\text{anterior}]{\text{Corolario}} u \equiv u(a)$ en Ω. #

En el resultado anterior se puede cambiar máximo por mínimo.

Basta cambiar $u \longleftrightarrow -u$ que vuelve a ser armónica, y ahora máximos $\longleftrightarrow$ mínimos. #

Corolario

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica y no constante en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces u es abierta.

Demostración.- Tomamos $D(a,r) \subset \Omega$ $r > 0$. y calculamos $u(D(a,r)) \subset \mathbb{R}$

$u(D(a,r))$ es conexo en $\mathbb{R} \rightsquigarrow u(D(a,r)) = |\alpha, \beta|$ un intervalo.

$\beta \notin u(D(a,r))$ ya que si esto fuera así $\underset{\text{alcanza máximo}}{\overset{u}{\rightsquigarrow}}$ $u \equiv \text{cte}$.

$\alpha \notin u(D(a,r))$ ya que si esto fuera así $\underset{\text{alcanza mínimo}}{\overset{u}{\rightsquigarrow}}$ $u \equiv \text{cte}$.

Así $u(D(a,r)) = (\alpha, \beta)$ es abierto. #

Corolario

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo acotado y $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es continua y tiene la propiedad de la media en Ω (en particular si $u \in A(\Omega)$) entonces

$$\sup\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \sup\{u(z) : z \in \partial\Omega\}.$$

Demostración.- Observar que los supremos anteriores son máximos.

$M := \sup\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\}$ $\qquad m := \sup\{u(z) : z \in \partial\Omega\}$ $\qquad \partial_\infty \Omega = \partial \Omega$

Claramente $M \geq m$. Como $\Omega \subset \mathbb{C}$ es acotado

Así, para cada $b \in \partial\Omega$ tenemos

$$\lim_{\substack{z \to b \\ z \in \Omega}} u(z) = u(b) \leq m \xrightarrow[\text{Máximo}]{\text{Principio}} u(z) \leq m \quad \forall z \in \Omega$$

$\longrightarrow M \leq m$. #

Corolario

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo acotado y $u, v : \overline{\Omega}^{\mathbb{C}_\infty} \to \mathbb{R}$ son continuas y tienen la propiedad de la media en Ω (en particular si $u, v \in A(\Omega)$) y $u|_{\partial_\infty \Omega} = v|_{\partial_\infty \Omega}$ entonces $u = v$.

Demostración.- $(u-v)(b) = 0 \quad \forall b \in \partial^\infty \Omega \xrightarrow[\text{máximo}]{\text{Principio}} u(z) - v(z) \leq 0 \quad \forall z \in \Omega$

Aplicando el mismo razonamiento a

$(v-u) \longrightarrow v(z) - u(z) \leq 0 \quad \forall z \in \Omega$

De aquí se sigue que: $u \equiv v$. #

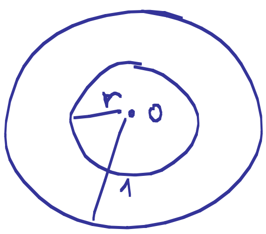
Dado un abierto conexo y una función continua $\varphi : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$, el problema de Dirichlet para la región Ω con la condición de frontera φ consiste en encontrar, si existe una función continua $u : \overline{\Omega}^\infty \to \mathbb{R}$ tal que:

- $u|_\Omega$ es armónica;
- $u|_{\partial_\infty \Omega} = \varphi$.

Unicidad de la solución

El ultimo corolario proporciona la unicidad de la solución del problema de Dirichlet.

A partir de ahora nos ocuparemos del problema de la existencia de soluciones al problema de Dirichlet. Para ello empezaremos por extender la propiedad de la media. En concreto, supongamos que $u : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $u|_{D(0,1)} \in A(D(0,1))$, entonces



Utilizando que $u|_{D(0,1)}$ tiene la propiedad de la media, si tomamos $0 \leq r < 1$ tenemos

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta \quad [*]$$

tomando $r_n \to 1$ una sucesión, la continuidad uniforme de u en $\overline{D(0,1)}$ nos dice que $u(r_n e^{i\theta}) \longrightarrow u(e^{i\theta})$ uniformemente en $\theta \in [0, 2\pi]$. Ahora, tomando límites en [*] se obtiene que:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, d\theta \quad [**]$$

Lo que queremos ahora es extender la fórmula [**] para calcular $u(z)$; $|z|<1$, en lugar de $u(0)$.

Teorema

Si $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u|_{D(0,1)}$ es armónica, para cada $z \in D(0,1)$ se verifica:

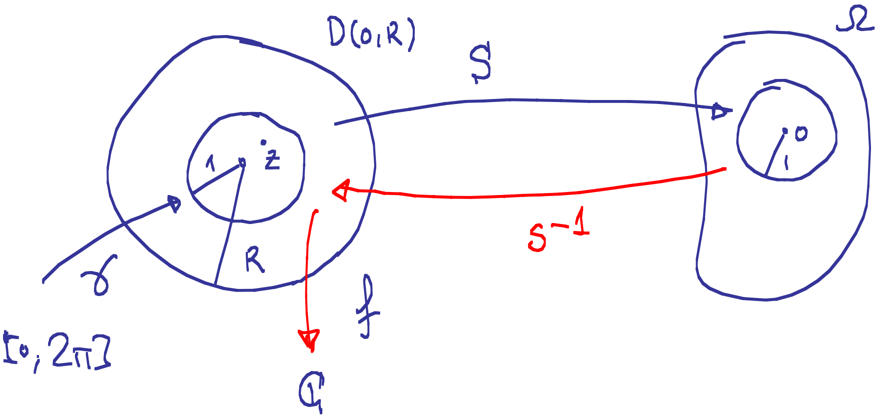
$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) K(e^{it}, z)\,dt, \quad [*].$$

FINAL

donde $K(w,z) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2}$, $|w| = 1$ y $|z| < 1$ (K núcleo de Poisson).

Demostración.– Haremos la demostración en dos etapas

1ª ETAPA.– Suponemos que existe $R > 1$ tal que $u \in A(D(0,R))$. Fijamos $z \in D(0,1)$ y



Tomamos $S_z = \frac{w - z}{1 - \bar{z} w}$

S es una transformación de Möbius que lleva $\overline{D(0,1)} \longleftrightarrow \overline{D(0,1)}$

Supongamos $1 < R < \frac{1}{|z|}$ (no es restrictivo). Tomemos $f : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\operatorname{Re} f = u$. Fijemos:

- $\Omega = f(D(0,R))$. Ω es abierto, $\Omega \supset \overline{D(0,1)}$ y $S^{-1} : \Omega \longleftrightarrow D(0,R)$ es holomorfa.
- $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Consideramos el camino $S \circ \gamma$.
- Consideramos $f \circ S^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega)$

Utilizamos la formula de Cauchy para $f \circ S^{-1}$ y $S \circ \gamma$ y escribimos

$$f \circ S^{-1}(0) \cdot \operatorname{Ind}(S \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S \circ \gamma} \frac{(f \circ S^{-1})(w)}{w}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(\theta))}{S(\gamma(\theta))} S'(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{S(w)} S'(w)\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w}\left[w\frac{S'(w)}{S(w)}\right] dw = [*]$$

$$w\frac{S'(w)}{S(w)} = w\left[\frac{1}{w-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}w}\right] = w\left[\frac{1-\cancel{\bar{z}w}+\cancel{\bar{z}w}-|z|^2}{(w-z)(w\cdot\bar{w}-\bar{z}\cdot w)}\right] =$$

$$= \frac{\cancel{w}}{\cancel{w}}\left[\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}\right] = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} = K(w,z)$$

Así completamos $[*]$ como:

$$[*] = \frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{\cancel{e^{i\theta}}} K(e^{i\theta},z)\, \cancel{i}\cancel{e^{i\theta}}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cdot K(e^{i\theta},z)\, d\theta.$$

Por otro lado, $f\circ S^{-1}(0)\cdot \mathrm{Ind}(S\circ\gamma,0) = f(z)\cdot \mathrm{Ind}(S\circ\gamma,0)$.

Lo que ocurre ahora es que $\mathrm{Ind}(S\circ\gamma,0)=1$ y así la igualdad establecida se resume en:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) K(e^{i\theta},z)\, d\theta.$$

Tomando partes reales en esta igualdad tenemos demostrada la fórmula de Poisson del enunciado $[*]$. Lo único que nos queda hacer ahora es razonar que $\mathrm{Ind}(S\circ\gamma,0)=1$, lo que hacemos a continuación:

$$\mathrm{Ind}(S\circ\gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S\circ\gamma}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{S'(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{S(\gamma(t))}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{S'(w)}{S(w)}\, dw =$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Principio Argumento}}}{=} \left(\text{nº ceros } S \text{ en } D(0,1) - \text{nº polos } S \text{ en } D(0,1)\right) = 1.$$

2ª ETAPA.- Supongamos ahora que $u: \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y armónica en $D(0,1)$. Tomamos $0<\rho_n<1$ con $\rho_n \nearrow 1$ y definimos

$$V_n(z) = u(\rho_n z) \rightsquigarrow V_n \in A(D(0, 1/\rho_n))$$

Utilizando la primera etapa obtenemos que

$$\underbrace{u(\rho_n z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(z) \qquad = V_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho_n e^{i\theta})\, K(e^{i\theta}, z)\, d\theta, \qquad u(\rho_n e^{i\theta}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{unif. en } \theta\in[0,2\pi]} u(e^{i\theta})}$$

$$\Downarrow$$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, K(e^{i\theta}, z)\, d\theta. \qquad \#$$

La fórmula de Poisson [*] sugiere como hemos de buscar la solución al problema de Dirichlet. Para de hecho resolver el problema de Dirichlet necesitamos algún trabajo previo que pasamos a realizar.

Primero observamos que el núcleo de Poisson puede escribirse en coordenadas polares como sigue:

$$K(e^{it}, re^{i\alpha}) = \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\alpha}|^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\alpha-t)}|^2}, \text{ para } z = re^{i\alpha},\ 0\le r<1.$$

Efectivamente: para $w = e^{it}$ $z = re^{i\alpha}$ tenemos

$$K(e^{it}, re^{i\alpha}) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\alpha-t)}|^2} = \frac{1-r^2}{|(1-\cos(\alpha-t)) - ir\,\mathrm{sen}(\alpha-t)|^2} =$$

$$= \frac{1-r^2}{\underbrace{1 + \underbrace{r^2\cos^2(\alpha-t)}_{} - 2r\cos(\alpha-t) + \underbrace{r^2\mathrm{sen}^2(\alpha-t)}_{}}_{r^2\cos^2 + r^2\mathrm{sen}^2 = 1 = \ldots}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-t)+r^2}$$

Así, la fórmula de Poisson se reescribe como sigue:

Corolario

Si $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u|_{D(0,1)}$ es armónica, para cada $z = re^{i\alpha} \in D(0,1)$ se verifica:

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})P_r(\alpha - t)dt, \text{ con } 0 \le r < 1$$

donde $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$ (P núcleo de Poisson)

El núcleo de Poisson también viene dado por las fórmulas

$$P_r(\theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \mathrm{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right) \quad (1)$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}. \quad (2)$$

Para convencerse de la validez de las fórmulas (1) y (2) es suficiente realizar los cálculos que siguen:

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \mathrm{Real}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

$$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = (1+re^{i\theta})(1 + re^{i\theta} + r^2 e^{i\theta} + \dots) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{i\theta}$$

$$\mathrm{Real}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = 1 + \cancel{2}\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{\cancel{2}} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \qquad \#$$

Proposición

El núcleo de Poisson $P_r(\theta)$ tiene las siguientes propiedades:

i) $0 \le P_r(\theta) = P_r(-\theta) = P_r(\theta + 2\pi)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

ii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)d\theta = 1$

iii) $0 \le P_r(\theta) \le P_r(\delta)$ si $0 < \delta \le |\theta| \le \pi$.

iv) Para $0 < \delta < \pi$, $\lim_{r\to 1^-} P_r(\theta) = 0$ uniformemente en $\delta \le |\theta| \le \pi$.

FINAL

Demostración.– $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$

i) Es claro a la vista de la fórmula que define $P_r(\theta)$.

ii) Aplicamos la fórmula obtenida en el teorema anterior para $u \equiv 1$ y $z = 0 = 0 \cdot e^{i0}$, con lo que tenemos:

$$1 = u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 \cdot P_r(0-\theta)\cdot d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(-\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\,d\theta.$$

iii) $P_r'(\theta) = \dfrac{-2r\,\text{sen}\,\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}$ para $-\pi \le \theta \le \pi$; si $0 \le \theta \le \pi$

$\text{sen}\,\theta \ge 0 \rightsquigarrow P_r'(\theta) \le 0 \rightsquigarrow P_r$ es decreciente en $[0,\pi]$.

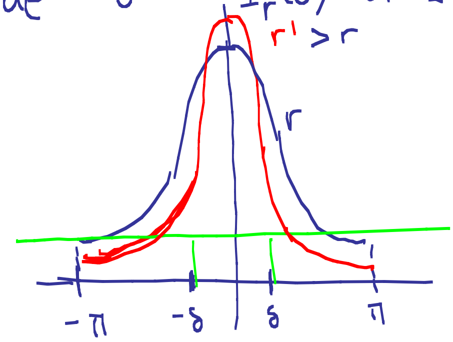
Si $0 < \delta \le |\theta| \le \pi \rightsquigarrow$

$$P_r(\theta) = P_r(-\theta) \le P_r(\delta)$$

iv) Para $0 < \delta \le |\theta| \le \pi$ se tiene que:

$$0 \le P_r(\theta) \le P_r(\delta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} \xrightarrow[r\to 1^-]{} \frac{0}{\underbrace{2-2r\cos\delta}_{\ne 0}} = 0.$$

Las gráficas de $\theta \longrightarrow P_r(\theta)$ en $[-\pi,\pi]$



$P_r(0) = \dfrac{1-r^2}{(1-r)^2} = \dfrac{1+r}{1-r} \xrightarrow[r\to 1^-]{} \infty$

$P_r(\pi) = \dfrac{1-r^2}{(1+r)^2} = \dfrac{1-r}{1+r} \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$

En $\{\theta : \delta < |\theta| \le \pi\}$ $P_r(\theta) \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$ uniformemente

Proposición

Si $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ es continua sobre la circunferencia $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$ y para cada $z = \in D(0,1)$ se define

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt$$

se obtiene una función holomorfa $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$. Su parte real $u = \operatorname{Re} f$ que es armónica en $D(0,1)$, viene dada por la integral:

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})P_r(\alpha - t)dt, \text{ donde } z = re^{i\alpha}$$

Demostración.- $t \in \mathbb{R}$, $|z|<1$

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} = (1+ze^{-it})(1+ze^{-it}+z^2e^{-2it}+\dots\dots) =$$

$$= 1+2ze^{-it}+2z^2e^{-2it}+\dots+2z^n\cdot e^{-int}+\dots$$

donde para $|z|<1$ fijo, la serie que hemos escrito converge uniformemente en el intervalo $[0,2\pi]$. Consecuentemente,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})(1+2ze^{-i\theta}+\dots+2z^n e^{-in\theta}+\dots)d\theta =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{uniforme}}}{\overset{\substack{\text{convergencia} \\ \downarrow}}{=}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\underbrace{\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})\cdot e^{-in\theta}}\Big\}\cdot z^n \qquad |z|<1.$$

↓ n-ésimo coeficiente de Fourier de φ

Es claro que f es una función holomorfa. #

Teorema: solución al Problema de Dirichlet

Si $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ es continua sobre la circunferencia $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$, existe una única función continua $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$u|_{\mathbf{T}} = \varphi; \quad u|_{D(0,1)} \text{ es armónica}$$

FINAL

que viene dada mediante la fórmula integral de Poisson:

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})P_r(\alpha - t)dt, \text{ donde } z = re^{i\alpha}$$

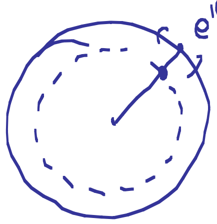
Demostración.- La unicidad, como ya se comentó en la página 14, se sigue del principio del Máximo para funciones continuas en $\overline{D(0,1)}$ y armónicas en $D(0,1)$, segundo Corolario página 13.

Una vez que φ está dada, después de los resultados anteriores, es claro que la solución u tiene que venir dada por:

$$u(z) := \begin{cases} \varphi(z) & \text{si } |z| = 1 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(\alpha - \theta)\, d\theta & \text{si } z = re^{i\alpha} \quad r < 1 \\ & \alpha \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

La prueba estará terminada probando ÚNICAMENTE que u es continua. Hacemos la prueba en DOS ETAPAS.

1ª ETAPA.- $\lim_{r \to 1^-} u(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$ unif. en $[-\pi, \pi]$.



Dado $\varepsilon > 0$, encontraremos cierto $0 < \rho < 1$ tal que si $\rho < r < 1$ entonces

$$|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| < \varepsilon \quad \forall\, \theta \in [-\pi, \pi].$$

Tenemos:

$$|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{is}) P_r(\theta - s)\, ds - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\theta})\, ds \right| =$$

$\underline{\theta - s = u}$

$s = \theta - u$

$ds = -du$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\theta+\pi}^{\theta-\pi}\varphi(e^{i(\theta-u)})\,P_r(u)\,(-du) \;-\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{i\theta})\,P_r(s)\,ds\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{i(\theta-s)})\,P_r(s)\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{i\theta})\,P_r(s)\,ds\right| \le$$

(*)

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})\right| P_r(s)\,ds \le$$

$0<\delta<\pi$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|s|\le\delta}\left|\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})\right| P_r(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|s|\le\pi}\left|\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})\right| P_r(s)\,ds \le$$

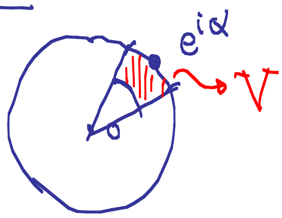
$$\le \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon\int_{|s|\le\delta}P_r(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\,2\cdot\|\varphi\|_\infty\cdot\int_{\delta<|s|\le\pi}P_r(s)\,ds \le \varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\,2\|\varphi\|_\infty\cdot\varepsilon\cdot 2\pi = \varepsilon + 2\|\varphi\|_\infty\cdot\varepsilon$$

con la condición de que $\rho<r<1$ ha sido tomado con $|P_r(s)|<\varepsilon$ si $\delta<|s|\le\pi$.

(*) Tomamos para $\varepsilon>0$, $\delta>0$ (por continuidad unif. de φ) tal que si $|s|<\delta \Rightarrow |\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})| < \varepsilon \;\; \forall\theta\in[-\pi,\pi]$

$\underline{2^a \text{ ETAPA}}$.- Ahora vemos que u es continua en cada $e^{i\alpha}\in\mathbb{T}$



Dado $\varepsilon>0$, tomamos $\eta>0$ tal que si $|\theta-\alpha|<\eta \Rightarrow |\varphi(e^{i\theta})-\varphi(e^{i\alpha})|<\varepsilon$

Tomamos ρ de la 1^a ETAPA tal que $|u(re^{i\theta})-\varphi(e^{i\theta})|<\varepsilon$ para cada $\theta\in[0,2\pi]$ si $\rho<r<1$

Definimos

$$V = \{ re^{i\theta} : \rho < r \leq 1 , |\theta - \alpha| < \eta \}.$$ que

es un entorno de $e^{i\alpha}$ en la topología relativa de $\overline{D(0,1)}$. Entonces, si $re^{i\theta} \in V$ tenemos que:

$$|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\alpha})| \leq |u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| + |\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\alpha})| < 2\varepsilon$$

\#

Corolario

Si $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ es continua y $u|_{D(0,1)}$ es armónica entonces $u|_{D(0,1)}$ es la parte real de la función holomorfa

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \quad z \in D(0,1)$$

Demostración.- Sabemos que $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ por una proposición anterior. Si $z = re^{i\alpha}$ entonces

$$\frac{e^{it} + re^{i\alpha}}{e^{it} - re^{i\alpha}} = \frac{1 + re^{i(\alpha - t)}}{1 - re^{i(\alpha - t)}} \xrightarrow[\text{reales}]{\text{Partes}} P_r(\alpha - t)$$

\#

Corolario: Fórmula de Schwarz

Para una función holomorfa $g = u + iv$ en un abierto $\Omega \supset \overline{D(0,1)}$ se verifica:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt + iv(0); \quad z \in D(0,1)$$

Demostración.- Si escribimos $f(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$, entonces $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $\operatorname{Re} f = u \rightsquigarrow$ $g - f$ no tiene parte real en $D(0,1) \rightsquigarrow g - f = i\text{cte} \rightsquigarrow g(0) - \underset{u(0)}{\underset{\parallel}{f(0)}} = i\text{cte}$

$\rightsquigarrow \text{cte} = v(0)$ \#

Teorema: solución al Problema de Dirichlet en $D(a,R)$

Si $\varphi : \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\} \to \mathbb{R}$ es continua, existe una única función continua $u : \overline{D(a,R)} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$u|_{\{z\in\mathbb{C}:|z-a|=R\}} = \varphi; \quad u|_{D(a,R)} \text{ es armónica}$$

FINAL

que viene dada mediante la fórmula integral de Poisson:

$$u(a+re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+Re^{it})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\alpha-t)+r^2}dt; \quad 0 \le r < R$$

Demostración.- Es suficiente hacer el cambio de variable

$$w = \frac{z-a}{R} \quad \text{con } |z-a| \le R$$

y tener en cuenta la fórmula obtenida para el $\overline{D(0,1)}$. #

FINAL

Teorema

Toda función continua $u : \to \mathbb{R}$ con la propiedad de la media es armónica.

Demostración.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que satisface la PM. Tomamos $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$, y consideramos $u|_{\partial D(a,R)}$: utilizamos ahora el T^{ma} anterior y encontramos $v : \overline{D(a,R)} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua t.q. $v|_{D(a,R)} \in A(D(a,R))$.

Así, u y v son continuas en $\overline{D(a,R)}$, tienen PM en $D(a,R)$ y coinciden en $\partial D(a,R)$ $\xrightarrow[\text{pág 13}]{\text{2º Corolario}}$ $u = v$ en $\overline{D(a,R)}$ y por lo tanto $u|_{D(a,R)}$ es armónica. Como la propiedad de ser armónica es local concluimos que $u \in A(\Omega)$ #

Convergencia de sucesiones de funciones armónicas

Teorema

Si una sucesión de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos, la función límite $u : \Omega \to \mathbb{R}$ también es armónica.

Demostración.– $u_n \in A(\Omega)$ y $u_n \xrightarrow{\tau_K} u \rightsquigarrow u$ es continua y claramente tiene la propiedad de la media (EL ALUMNO DEBE COMPROBARLO) $\rightsquigarrow u \in A(\Omega)$. #

Lema: Desigualdades de Harnack

Si $u : \overline{D(a,R)} \to [0+\infty)$ es una función continua y armónica en $D(a,R)$, para cada $r \in (0,R)$ y cada $\alpha \in [0,2\pi]$ se verifica

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \le u(a+re^{i\alpha}) \le \frac{R+r}{R-r}u(a) \tag{3}$$

Demostración.– Para $r<R$ se tiene

$$u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+Re^{it})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}\,dt$$

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2} = \frac{R^2-r^2}{|Re^{it}-re^{i\theta}|^2} = [*]$$

Como:

$$R-r \le |Re^{it}-re^{i\theta}| \le R+r$$

$$\frac{R-r}{R+r} \le \frac{R^2-r^2}{(R+r)^2} \le [*] \le \frac{R^2-r^2}{(R-r)^2} = \frac{R+r}{R-r}$$

De aquí se siguen claramente las desigualdades (3), porque $u \geq 0$ utilizando la monotonía de la integral. #

Teorema

Para una sucesión creciente de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se cumple una de las dos alternativas siguientes:

i) $\lim_n u_n(z) = u(z) < +\infty$ para todo $z \in \Omega$.

ii) $\lim_n u_n(z) = +\infty$ para todo $z \in \Omega$.

En ambos casos la convergencia es uniforme sobre compactos. Cuando se cumple i), la función límite $u(z) = \lim_n u_n(z)$ es armónica

Demostración.- $u_1 \le u_2 \le \dots \le u_n \le \dots \rightsquigarrow 0 \le u_2 - u_1 \le \dots \le u_n - u_1 \le \dots$

Podemos suponer que la sucesión creciente (u_n) está formada por funciones positivas y así lo hacemos:

$$0 \le u_1 \le u_2 \le \dots \le u_n \le \dots$$

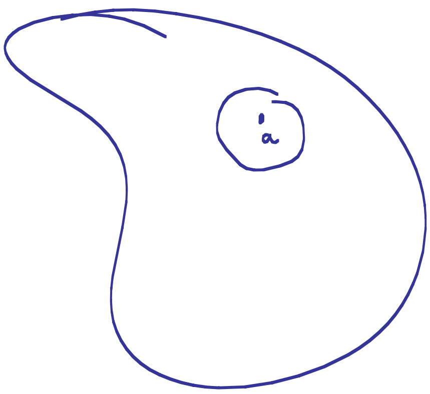
Escribimos

$$u(z) = \lim_n u_n(z) = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(z) \in [0, +\infty].$$

Pongamos $A = \{z \in \Omega : u(z) = +\infty\}$ y $B = \{z \in \Omega : u(z) < +\infty\}$

Vamos a probar que A y B son abiertos $\xrightarrow[\text{conexo}]{\Omega}$ ó $\Omega = A$ ó $\Omega = B$

y luego veremos la convergencia unif. sobre compactos.



Si $a \in \Omega$ y tomamos $D(a,R) \subset \Omega$ entonces, para $z \in D(a,R)$

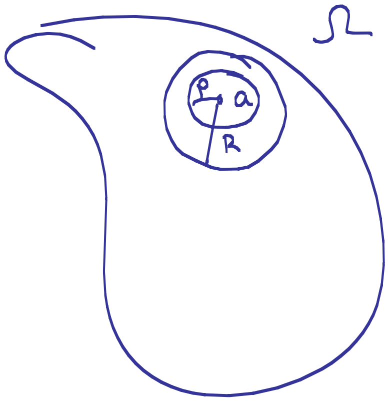
$$\frac{R - |z-a|}{R + |z-a|} u_n(a) \le u_n(z) \le \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|} u_n(a)$$

$\rightsquigarrow$ si $u(a) = +\infty \rightsquigarrow u(z) = +\infty$ para cada $z \in D(a,R)$

$\rightsquigarrow$ si $u(a) < +\infty \rightsquigarrow u(z) < +\infty$ " " $z \in D(a,R)$.

Ahora lo que queda es ver que $u_n \longrightarrow u$ unif. sobre compactos.

Caso a) Si $u(z)=+\infty$ $\forall z\in\Omega$.



Fijamos $a\in\Omega$ y tomemos $\overline{D(a,\rho)}\subset D(a,R)\subset\Omega$. Veremos que la convergencia $u_n\longrightarrow+\infty$ es uniforme en $\overline{D(a,\rho)}$. Se tiene

$$\frac{R-|z-a|}{R+|z+a|}\,u_n(a)\le u_n(z)\qquad\forall z\in\overline{D(a,\rho)}$$

La función $\phi: x\longrightarrow\dfrac{R-x}{R+x}$ es decreciente en $(0,+\infty)$ $\left[\phi'(x)=\dfrac{-2R}{(R+x)^2}<0\right]$.

Así concluimos

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}\,u_n(a)\le u_n(z)\qquad\forall z\in\overline{D(a,\rho)},$$

lo que implica que $u_n\longrightarrow+\infty$ unif. en $\overline{D(a,\rho)}$.

Caso b) $u(z)<+\infty$ para cada $z\in\Omega$. Dado $\overline{D(a,\rho)}\subset D(a,R)\subset\Omega$

Como antes escribimos para $n\geq m$,

$$0\le u_n(z)-u_m(z)\le\frac{R+|z-a|}{R-|z-a|}\,(u_n(a)-u_m(a))\underset{|z-a|\le\rho}{\le}\frac{R+\rho}{R-\rho}\,(u_n(a)-u_m(a))$$

dado que $\varphi: x\longrightarrow\dfrac{R+x}{R-x}$ es una función creciente en $(0,R)$

$$\varphi'(x)=\frac{R-x+(R+x)}{(R-x)^2}=\frac{2R}{(R-x)^2}>0.\qquad\#$$

FIN

Murcia 16 Enero de 2007

Bernardo Cascales